17/11/2020

<u>Κυματική εξίσωση</u>

$$u_{tt} - \underbrace{\Delta u}_{=\Delta x = (\partial^2_{x_1}, \dots, \partial^2_{x_n})} = 0 \iff \overbrace{\square}^{= \text{τελεστής d'Alembert}} u = 0$$

$$u : \underbrace{U}_{\subset \mathbb{R}^n} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$$

Μοντελοποίηση : $n=1$ ταλαντούμενη χορδή

$n=2$ ταλαντούμενη μεμβράνη

$n=3$ ελαστικό στερεό

[σχετίζεται άμεσα με ταλάντωση : βλ. ∂_t^{2}]

$u(x,t)$ αναπαριστά την μετατόπιση σε κάποια κατεύθυνση ενός σωματιδίου στο σημείο $x\in\mathbb{R}^n$ την χρονική στιγμή $t\geq 0$.

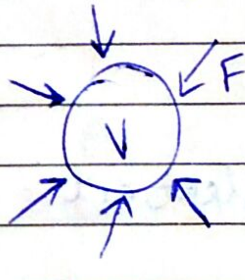
Έστω $V\subseteq\mathbb{R}^n$. Αφού u είναι μετατόπιση, το u_t είναι ταχύτητα και το u_{tt} επιτάχυνση. Η συνολική επιτάχυνση μέσα στο V =

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_V u(x,t)\,dx = \int_V \partial_t^2 u(x,t)\,dx.$$

Δεύτερος Νόμος του Newton: μάζα · επιτάχυνση = δύναμη. Εδώ η δύναμη που ασκείται στο V. [στα σωματίδια που βρίσκονται στο V] δίνεται από την συνολική δύναμη επαφής

$$-\int_{\partial V} \underbrace{F}_{=-Du}\cdot\underbrace{\nu}_{=\text{εξ. μον. κάθ.}}\,dS \overset{\text{Gauss}}{=} -\int_V \mathrm{div}F\,dx$$

[πυκνότητα μάζας $\rho=1$]:



$$\underset{\text{2. Νόμος Newton}}{\Longrightarrow} \int_V \partial_t^2 u\,dx = \int_V (-\mathrm{div}F)\,dx$$

$$\underset{\forall V\subset\mathbb{R}^n}{\Longrightarrow} \partial_t^2 u = -\mathrm{div}F \iff \partial_t^2 u + \underbrace{\mathrm{div}F}_{=-\Delta u} = 0 \iff (\partial_t^2-\Delta)u = 0$$

Για ελαστικά σώματα : $F = F(Du)$ και για μικρές κλίσεις Du, υποθέτουμε (γραμμικοποίηση)

F γραμμικό $\Longrightarrow F(Du) \approx -\alpha Du$ με σταθερό α. Θέτοντας $\alpha = 1$: $F = -Du \Rightarrow \operatorname{div} F =$

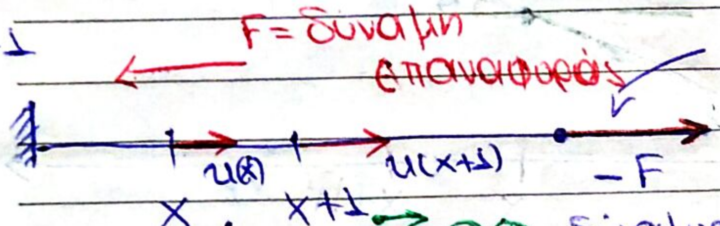
$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \underbrace{-\nabla \cdot \nabla u}_{=(\partial x_1, \dots, \partial x_n)\cdot(\partial x_1, \dots, \partial x_n) = \partial x_1^2 + \dots + \partial x_n^2} = -\Delta u.$$

Ας προσπαθήσουμε να καταλάβουμε την F καλύτερα

μοντέλο: $n=1$ (longitudinal displacement) vs $\underbrace{\text{transversal}}_{=\text{εγκάρσια}}$ $\underbrace{\text{displacement}}_{=\text{μετατόπιση}}$

longitudinal = κατά μήκος του μέσου

$n=1$



$u_{tt} \geq 0$ (*) δύναμη που ασκείται στο ελατήριο.

μετατόπιση του σωματιδίου στο σημ. x.

μέσο, η μετατόπιση ας είναι κατά μήκος αυτού (π.χ. ελατήριο).

(*) $u_{tt} > 0$, για $u(x+1) - u(x) > 0$

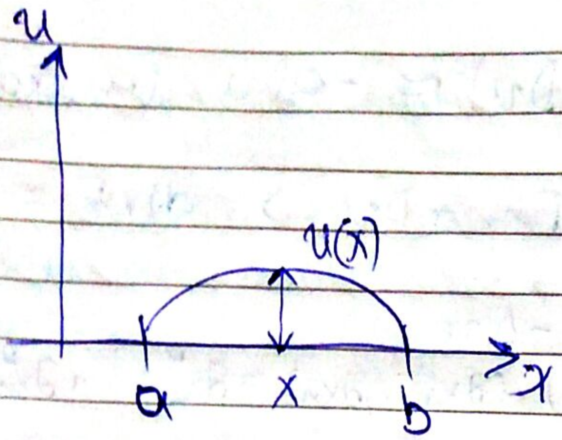
$$F = -u'(x) \approx -\frac{u(x+1) - u(x)}{1}$$

[αν $u(x+1) = u(x)$ η τάση (δύναμη ανά μονάδα χώρου) που νιώθουν τα ενδιάμεσα σωματίδια $= 0$]

$$\Longrightarrow \underbrace{F'}_{\text{τάση}} = -u''(x) = -u_{xx}(x,t) \underset{\uparrow\ 2^{\text{ος}}\ \text{Ν. Νεωτ.}}{=} -u_{tt}(x,t)$$

τάση ($\Rightarrow$ δύναμη = ολοκλ. τάσης)

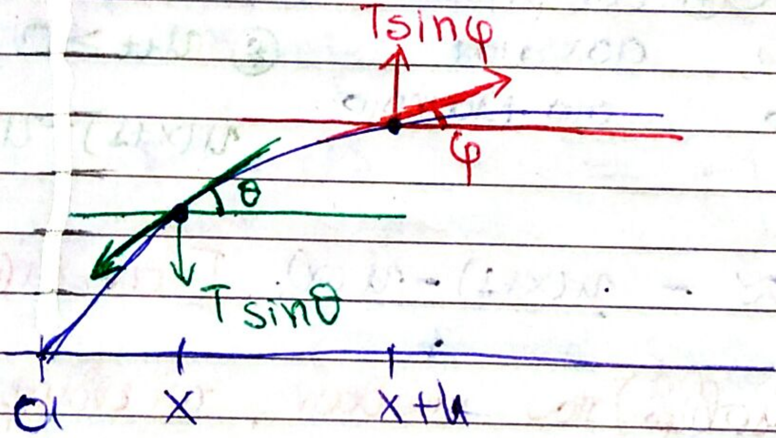
πιο απλό (και ίσως πιο σωστό) παράδειγμα: εγκάρσια μετατόπιση χορδής ($n=1$)



$u(x,t)$ = εγκ. μετατόπιση στο x κατά την χρον. στιγμή t.

ρ = πυκνότητα μάζας της χορδής ανά μονάδα μήκους.

Ποιά είναι οπη F?



T= τάση χορδής

$F \approx T\sin\varphi - T\sin\theta$

$\approx T\tan\varphi \quad (\varphi, \theta << 1)$

$\approx T(u_x(x+h,t) - u_x(x))$

$\approx h \cdot T u_{xx}$

ρh = μάζα του τμήματος $[x, x+h]$

2ος N.N.: $\rho h u_{tt}(x,t) = F \approx hTu_{xx}(x,t)$

$\underset{\substack{h\to 0 \\ \rho=1}}{\Longrightarrow} \quad u_{tt} = u_{xx}$

Προσοχή αλλό το F εδώ αλλο στην 3.

Πρόγραμμα: Επίλυση της κυματικής εξίσωσης με εξαγωγή ρητού τύπου της λύσης στον $\mathbb{R}^n$ - ($n=1,2,3$) και μάλιστα προβλήματος αρχικών τιμών:
$$\begin{cases} \underbrace{(\partial_t^2 - \Delta)}_{=:\,\square} u(x,t) = 0, \text{ στο } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(\cdot,0) = g,\ u_t(\cdot,0) = h, \text{ στο } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

<u>Στρατηγική:</u> <u>$n=1$</u> (τύπος d'Alembert)

πως: με εξίσωση μεταφοράς:

$(\partial_t^2 - \partial_x^2) = (\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x)$, δηλ.

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2) u = 0 \iff (\partial_t + \partial_x)\cdot\underbrace{(\partial_t - \partial_x) u}_{=:\,v} = 0$$

$\Longrightarrow (\partial_t + \partial_x) v = 0$: ομογενής εξ. μεταφοράς

$\Longrightarrow v(x,t) = a(x-t)$, με $v(x,0) = a(x)$

$\Longrightarrow (\partial_t - \partial_x) u(x,t) = v(x,t) = a(x-t)$:

μια μη ομογενής εξ. μεταφοράς

$$\Longrightarrow u(x,t) := \int_0^t a(\underbrace{x + (t-s) - s}_{x+t-2s\,=:\,y})\,ds + b(x+t)$$

με $u(x,0) = b(x)$

$$\Longrightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} a(y)\,dy + b(x+t)$$

μένει να βρούμε ποια είναι τα a, b σε σχέση με τα αρχικά δεδομένα g, h:

$u(x,0) = b(x) = g(x)$

$v(x,0) = \partial_t u(x,0) - \partial_x u(x,0) = h(x) - g'(x) = a(x) \Longrightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} (h(y) - g'(y))dy + g(x+t)$

$$\Longrightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy$$

Τύπος d'Alembert $n=1$

<u>Προσοχή</u>: Ο τύπος d'Alembert «βγήκε» ως <u>αναγκαία</u> συνθήκη για την λύση του ΠΑΤ της κυμ. εξ. στον $\mathbb{R}^n$ (και είναι μοναδικός $\Longrightarrow$ μοναδικότητα λύσης)

Αποδεικνύεται ότι για $g \in C^2(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$ η $u(x,t) = \frac{1}{2}(g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy$ είναι λύση της

$(\partial_t^2 - \partial_x^2)u = 0$, στο $\mathbb{R}\times(0,\infty)$, είναι $C^2(\mathbb{R}\times[0,\infty))$, και $u(x,0) = g(x)$
$u_t(x,0) = h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ [Th.1, p.68 Evans]

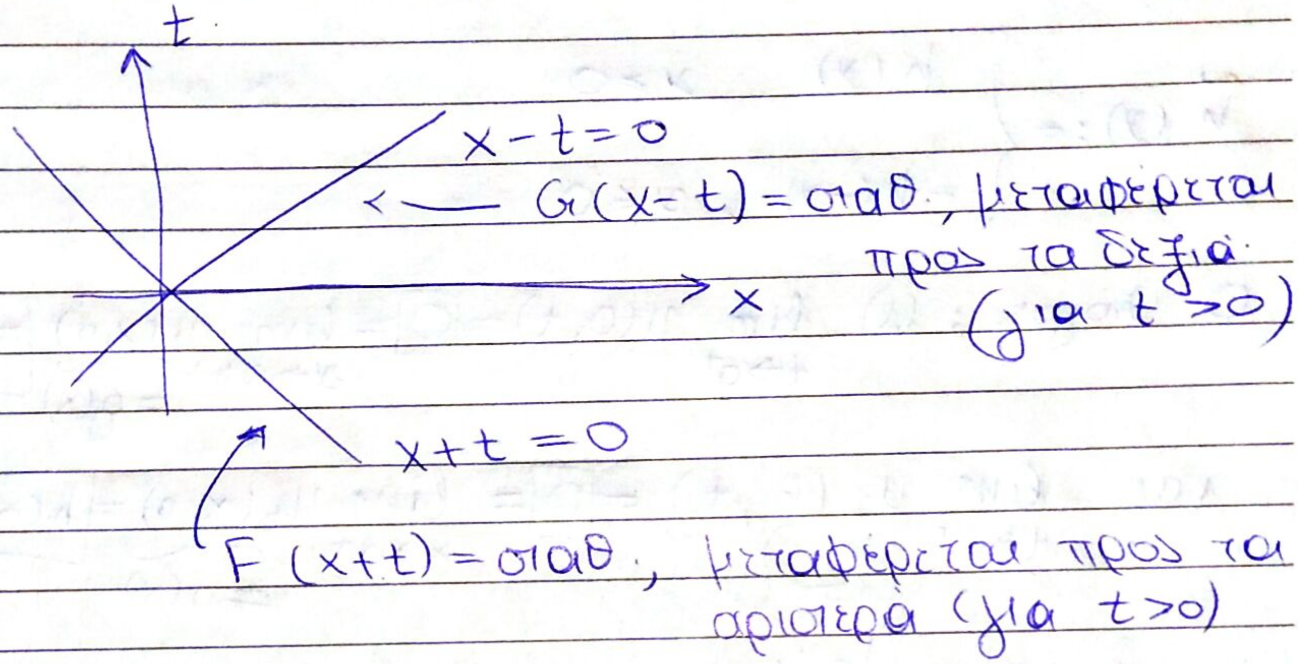
<u>Παρατήρηση</u>: Η $u(x,t)$ είναι της μορφής $F(x+t) + G(x-t)$ [$H' = h$:
$u(x,t) = \frac{1}{2}(g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2}(H(x+t) + H(x-t))$

Αντίστροφα, κάθε (αρκετά λεία) $F(x+t) + G(x-t)$ επιλύει την $\Box u(x,t) = 0$
$\Longrightarrow$ (Σημαντικό) η γενική λύση $u(x,t)$ της κυμ. εξίσωσης είναι το άθροισμα των

γενικών λύσεων των δύο εξ. μεταφοράς

$u_t - u_x = 0$, $u_t + u_x = 0$, εκ των οποίων

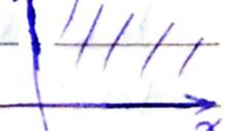
η μία «ταξιδεύει» προς τα δεξιά και η άλλη προς τα αριστερά.



<u>Επόμενο βήμα:</u> Επίλυση για $n=2,3$.

<u>Στρατηγική:</u> μεταφράζουμε το πρόβλημα για $n \geq 2$ σε μία κυματική εξίσωση σε μία διάσταση για σφαιρικές μέσες τιμές (spherical means) [βλ. πιο μετά], όμως στην ημιευθεία $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$. Άρα, πρώτα να λύσουμε το ΠΑΣΤ (προβλ. αρχικών και συνοριακών τιμών) για την κυματική εξίσωση

$$\begin{array}{r} \\ \text{αρχ. τιμ.} \to \\ \text{συν. τιμ.} \to \end{array} \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & \text{στο } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty) \\ u = g, \quad u_t = h, & \text{στο } \mathbb{R}_+ \times \{t=0\} \\ u = 0, & \text{στο } \{x=0\} \times (0, \infty) \end{cases}$$



(Dirichlet ομογενείς
[μη ομογενής: $u = \tilde{g}$], Neumann (μη ομογ.) $u_x = \tilde{g}$)

Το ΠΑΣΤ στο $\mathbb{R}_+$ λύνεται μέσω περιττούς επέκτασης στο $\mathbb{R}$. Επεκτείνουμε τα αρχικά δεδομένα περιττά στον $\mathbb{R}$, δηλ.

$$\tilde{g}(x) := \begin{cases} g(x), & x \geq 0 \\ -g(-x), & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\tilde{h}(x) := \begin{cases} h(x), & x \geq 0 \\ -h(-x), & x \leq 0 \end{cases}$$

Ο λόγος: (1) $\lim\limits_{t \to 0^+} u(0,t) = \boxed{0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \underbrace{u(x,0)}_{=g(x)} \boxed{= g(0)}$

και $\lim\limits_{t \to 0^+} \underbrace{u_t(\cdot, t)}_{=0} = \boxed{0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \underbrace{u_t(x,0)}_{=h(x)} = \boxed{h(0)}$

(2) $\tilde{g}'(x) = \begin{cases} g'(x), & x \geq 0 \\ g'(-x), & x \leq 0 \end{cases} \Longrightarrow$ συνθ. συνοριακών και αρχ. δεδομένων

$\tilde{g}'(0) = g'(0) \Rightarrow \tilde{g} \in C^1(\mathbb{R})$, αντίστοιχα για $\tilde{h}$

Επίσης, $\tilde{g}''(x) = \begin{cases} g''(x), & x \geq 0 \\ -g''(x), & x \leq 0 \end{cases} \Longrightarrow$

$g''(0) = 0$ για να έχουμε $\tilde{g} \in C^2(\mathbb{R})$

Με αυτά τα δεδομένα σε όλο το $\mathbb{R}$ και με τύπο d'Alembert έχουμε

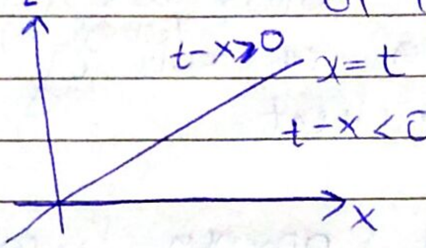
$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y)\,dy$$

ως λύση του ΠΑΤ $\begin{cases} (\partial_t^2 - \partial_x^2)\tilde{u} = 0, & \text{στο } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ \tilde{u}(\cdot,0) = \tilde{g}, \ \tilde{u}_t(\cdot,0) = \tilde{h} \end{cases}$

[$\tilde{u}(0,t) = 0$, $\forall t > 0$: ελέγξτε].

$\Longrightarrow$ $\forall x \geq 0$, $t \geq 0$: $u(x,t) = \tilde{u}(x,t)$

($\Longrightarrow$ $x+t \geq 0$, πρέπει να δούμε πότε $x-t \geq 0$ και πότε ≤ 0 γιατί τότε αλλάζουν οι τύποι για $\tilde{g}, \tilde{h}$).



για $x-t \geq 0$: $\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy$.

για $x-t \leq 0$: $\tilde{g}(x-t) = -g(t-x)$

για $x-t \leq 0$: $\int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y)\,dy =$

$\int_0^{x+t} h(y)\,dy + \int_{x-t}^{0} \tilde{h}(y)\,dy$ με $\int_{x-t}^{0} \underbrace{\tilde{h}(y)}_{=-h(-y)}\,dy$

$= \int_{t-x(\geq 0)}^{0} h(y)\,dy = -\int_0^{t-x(\geq 0)} h(y)\,dy \Longrightarrow$

$\int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y)\,dy = \int_{-x+t}^{x+t} h(y)\,dy$ [$-x+t \leq x+t$, για $x \geq 0$]

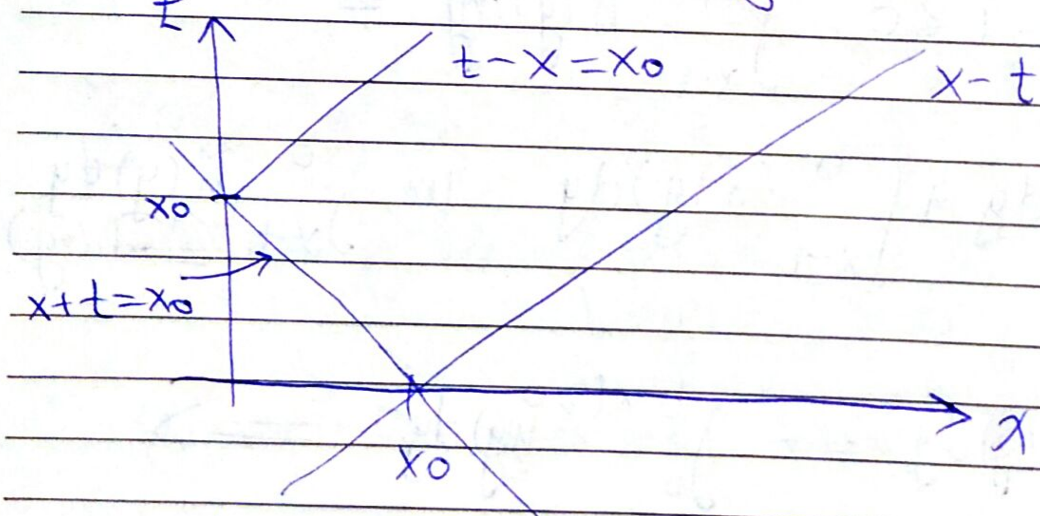
$$\Longrightarrow u(x,t)=\frac{1}{2}\Big(g(x+t)+g(x-t)\Big)+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}h(y)\,dy,\quad x\geq t\geq 0$$

$$=\frac{1}{2}\Big(g(x+t)+g(\ldots-\ldots)\Big)+\frac{1}{2}\int_{-x+t}^{x+t}h(y)\,dy,\quad 0\leq x\leq t.$$

για $x\geq 0,\ t\geq 0$

Ο τελευταίος τύπος είναι τύπος ως λύσης του ΠΑΣΤ στην ημιευθεία της κυμ. εξ. (ομογενής) με ομογενή συνοριακά δεδ. Dirichlet.

Για $h\equiv 0$ ερμηνεία: μία αρχική μετατόπιση g στο $x_0>0$ «σπάει» σε δύο κομμάτια: το ένα μεταφέρεται προς τα δεξιά (με ταχύτητα $=1$), το άλλο προς τα αριστερά (με ταχ. $=1$). Το τελευταίο γίνεται $=0$ στον «τοίχο» $x=0$ και ανακλάται και συνεχίζει να κινείται προς τα δεξιά.



$x-t=x_0>0$

<u>$t=0$:</u> $\quad x=x_0>0=t$

$$\Rightarrow u(x,t)=\frac{1}{2}\big(g(x_0)+g(x_0)\big)=g(x_0)$$

$t = \varepsilon: \quad x = x_0 + \varepsilon > \varepsilon = t \Rightarrow$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[g(x_0+\varepsilon) + g(x_0-\varepsilon)\right]$$

$\underline{x+t = x_0}$

$t = 0: \quad x = x_0 > 0 = t \Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x_0) + g(x_0)\right) = g(x_0)$

$t = \varepsilon: \quad x = x_0 - \varepsilon > t = \varepsilon$ avv $\varepsilon < \frac{x_0}{2} \Rightarrow$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x_0) + g(x_0 - 2\varepsilon)\right)$$

$t = \frac{x_0}{2}: \quad x = \frac{x_0}{2} \Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x_0) + \underbrace{g(0)}_{=0}\right)$

$t = \frac{x_0}{2} + \varepsilon: \quad x = \frac{x_0}{2} - \varepsilon < \frac{x_0}{2} + \varepsilon = t \Rightarrow$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x_0) - g(2\varepsilon)\right).$$

$t = x_0: \quad x = 0 < x_0 = t \Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x_0) - g(x_0)\right) = 0$

$t = x_0 + \varepsilon: \quad x = \varepsilon < x_0 + \varepsilon = t \Rightarrow$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x_0 + 2\varepsilon) - g(x_0)\right)$$